数学Ⅲ　ヤマシート　Ｎｏ．４－６　＜「**関数の連続性**」と「**中間値の定理**」。中間値の定理は、**方程式の実数解の存在を示す**のに有効！＞　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

＜到達目標＞　自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

□ 1　関数の「連続」の定義を述べることができる

□ 2　ある開区間における「方程式の実数解の存在」を示すのに、中間値の定理が非常に有効であるということを認識している

＜**関数 $f(x)$ が**、その定義域内の $x=$▲ **で連続**であるための条件は、

極限値 $\lim_{x\to▲} f(x)$ **が存在し、かつ、** $\lim_{x\to▲} f(x)=f(▲)$ **が成り立つこと**

すなわち、　「$\lim_{x\to▲-0} f(x)=\lim_{x\to▲+0} f(x)=f(▲)$」　が成り立つことです！＞

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^2$ がある。このとき，関数 $f(x)$ が $x=1$ で連続であることを示せ。

(2)　関数 $f(x)$ が，$f(x)=\begin{cases}\cos x & (x\fallingdotseq\pi)\\ 1 & (x=\pi)\end{cases}$ と定義されているとき，この関数が $x=\pi$ で不連続であることを示せ。

(3)　$f(x)=\sqrt{x-2}$ がある。このとき，関数 $f(x)$ が $x=2$ で連続であることを示せ。

(4)　関数 $f(x)=\begin{cases}-x+a & (x<1)\\ x+1 & (1\leqq x)\end{cases}$ が，$x=1$ で連続となるような a の値を求めよ。

(5)　$f(x)=[x]$ がある。このとき，関数 $f(x)$ は $x=3$ で連続か。

(6)　関数 $f(x)=[x^2]$ がある。

①　$y=f(x)$ $(0\leqq x<\sqrt{5})$ のグラフをかけ。

②　関数 $f(x)$ は，$x=\sqrt{2}$ で不連続であることを示せ。

(7)　関数 $f(x)=x[x]$ $(-2\leqq x<3)$ のグラフを描き，$x=0$，$x=1$ における連続性を調べよ。

＜中間値の定理は、難しく考える必要はありません。数Ｉでやった解の配置と似た感覚です。＞

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin x+x-1=0$ … ① は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

(2)　方程式 $3^x-6x+2=0$ は，$2<x<3$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを証明せよ。

(3)　方程式 $\log_{10} x - \dfrac{x}{20} = 0$ は，$10 < x < 10\sqrt{10}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

(4)　方程式 $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ は，2 より小さい正の解をもつことを証明せよ。

$\boxed{3}$　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$ のグラフをかき，$f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ax^{2n+1}+x^{2n}}{x^{2n}+1}$ …①（a は実数の定数）がある。

①　$f(x)$ を求めよ。

②　$x=1$ で，$f(x)$ が連続となるような a の値を求めよ。

(3)　関数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+2}+ax^n+bx+a-b}{x^{2n}+(2-a)x^n+a}$（$a$，$b$：定数）が，$x>0$ において連続となるための a，b の条件を定めよ。

$\boxed{4}$　x の 3 次方程式 $(x-a)(x-3a)(x-4a) = (x-2a)^2$ …①（a：正の定数）が，$a < x < 2a$，$2a < x < 3a$，$4a < x$ の範囲にそれぞれ 1 つずつ実数解をもつことを証明せよ。

解答

$\boxed{1}$　(1)　略　(2)　略　(3)　略　(4)　$a=3$　(5)　連続でない（不連続）　(6)　①　略　②　略

(7)　$x=0$ で連続，$x=1$ で不連続

$\boxed{2}$　(1)　略　(2)　略　(3)　略　(4)　略

$\boxed{3}$　(1)　$x=-1$

(2)　①　$-1<x<1$ のとき 0，$x=1$ のとき $\dfrac{a+1}{2}$，$x=-1$ のとき $\dfrac{-a+1}{2}$，

$x<-1$，$1<x$ のとき $ax+1$

②　$a=-1$

(3)　$a=1$，b は任意

$\boxed{4}$　略